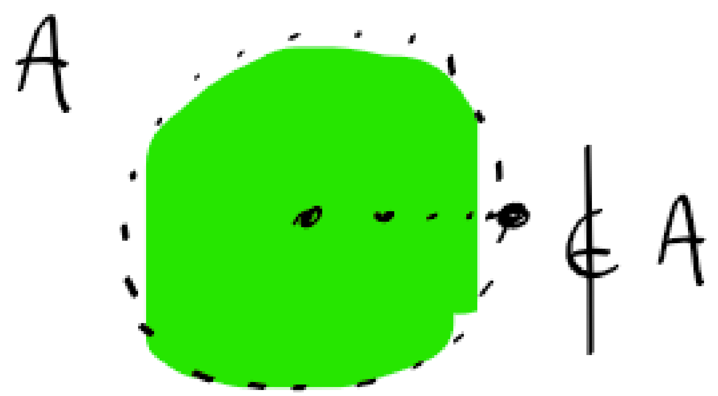
Připomeňme: • $A \subseteq M$ je uz. $\iff H(A) \subseteq A$

(kde $H(A) = \{x \in M : x$ je hraniční bod$\}$)



Fakt: • A je uzavřená

$\iff$ A^c je otevřená

$\iff$ „z A nejde vykonvergovat":

$\forall (x_n) \subseteq A : x = \lim x_n \implies x \in A.$

• A je otevřená $\iff$ $A^c = M \setminus A$ je uzavřená

Definice: $A \subseteq M$ je omezená, pokud je obsažena v nějaké kouli (tj. $\exists R > 0\ \exists c \in M$: $A \subseteq B(c,R)$).

Příklady: • $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ je otevřená ($\forall a,b \in \mathbb{R}$).

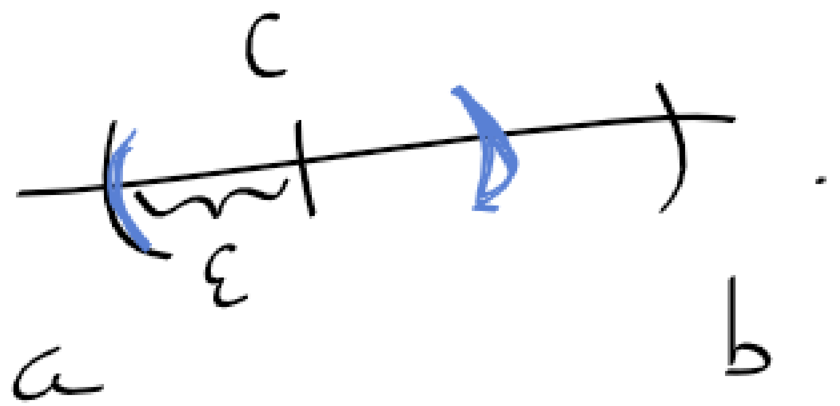
Důkaz:

$\mathbb{R} \setminus (a,b) = (-\infty, a] \cup [b, \infty).$

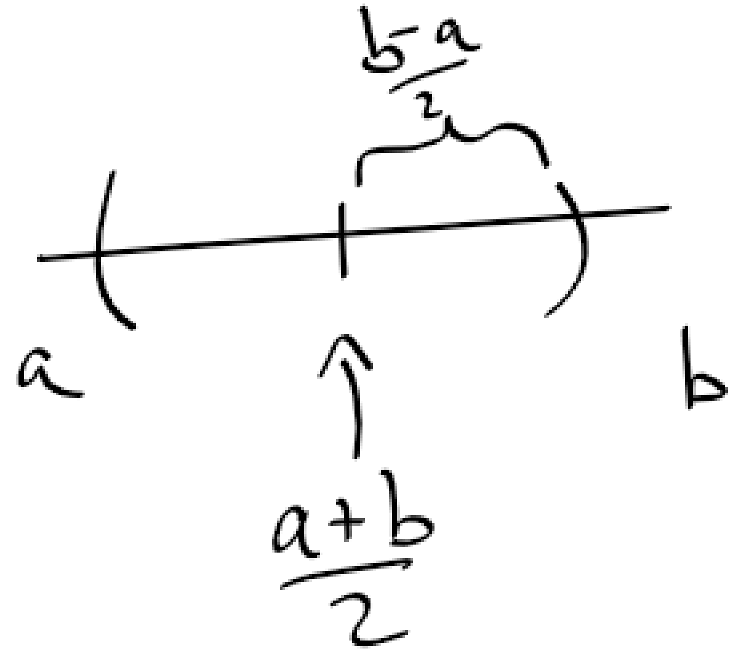
Z definice: $c \in (a,b)$. Tj. $a < c < b$,

$\varepsilon := \min\{|a-c|, |b-c|\}$, pak

$B(c,\varepsilon) = (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subseteq (a,b).$



Jinak: $(a,b) = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right).$



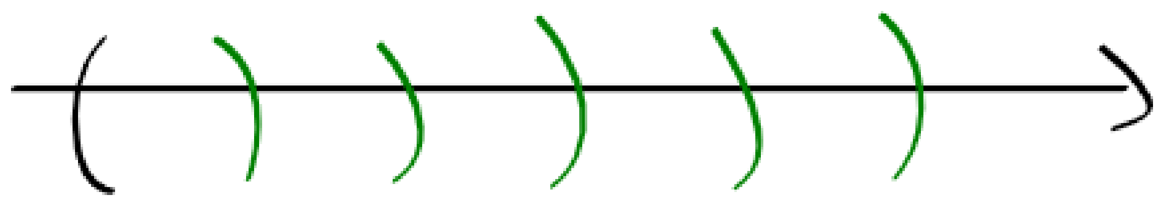
Víme, že ot. koule je otevřená.

Tedy (a,b) je ot.

• (a,∞) je ot. množina

1. ZP: z definice jako dříve.

2. ZP: $(a,\infty) = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{(a, a+i)}_{\text{ot.}}}_{\text{ot.}}$



(Libovolné sjedn. ot. je ot. V3S.)

• $(-\infty, a)$ je ot. $\qquad (-\infty,a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a-i, a)$.

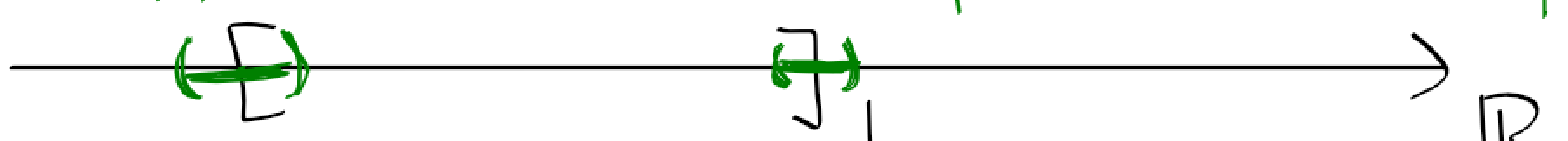
• Tedy pro $a<b$: $\underbrace{\underbrace{(-\infty,a)}_{\text{ot.}} \cup \underbrace{(b,\infty)}_{\text{ot.}}}_{\text{ot. (V3S)}}$ je ot.

• $[a,b] = \mathbb{R} \setminus \big((-\infty,a)\cup(b,\infty)\big)$ je komplement otevřené, takže $[a,b]$ je uzavřená.

Jiný způsob: z definice:

$$H([a,b]) \overset{(*)}{=} \{a,b\} \subseteq [a,b],$$

a tedy $[a,b]$ je uz.



Tedy $a,b \in H([a,b])$.

Nechť $x \in \mathbb{R}$, $x \neq a$, $x \neq b$.

Chceme $x \notin H([a,b])$.

V obou případech jsme hotovi.

• $(-\infty, a]$ je uzavřená v $(\mathbb{R}, \rho_e)$?

Je! • <u>Dk</u>: $\mathbb{R} \setminus (-\infty, a] = (a, \infty)$ je ot.

• <u>Dk</u>: $H\big((-\infty, a]\big) = \{a\} \subseteq (-\infty, a]$.

• $\{a\}$ byla by ot. pokud by platilo

$\exists \varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \subseteq \{a\}$. Ale platí:

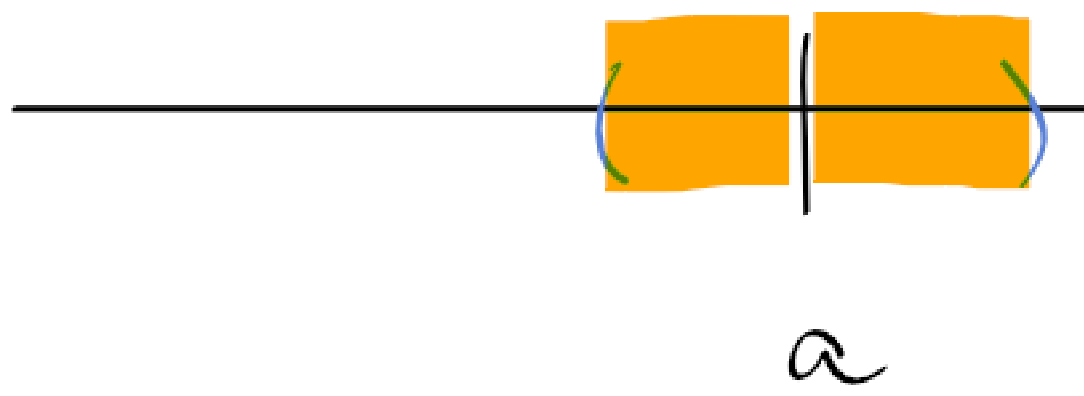
$\forall \varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \not\subseteq \{a\}$, tj. negace,

a tedy není otevřená.

Nicméně je uzavřená, neboť:

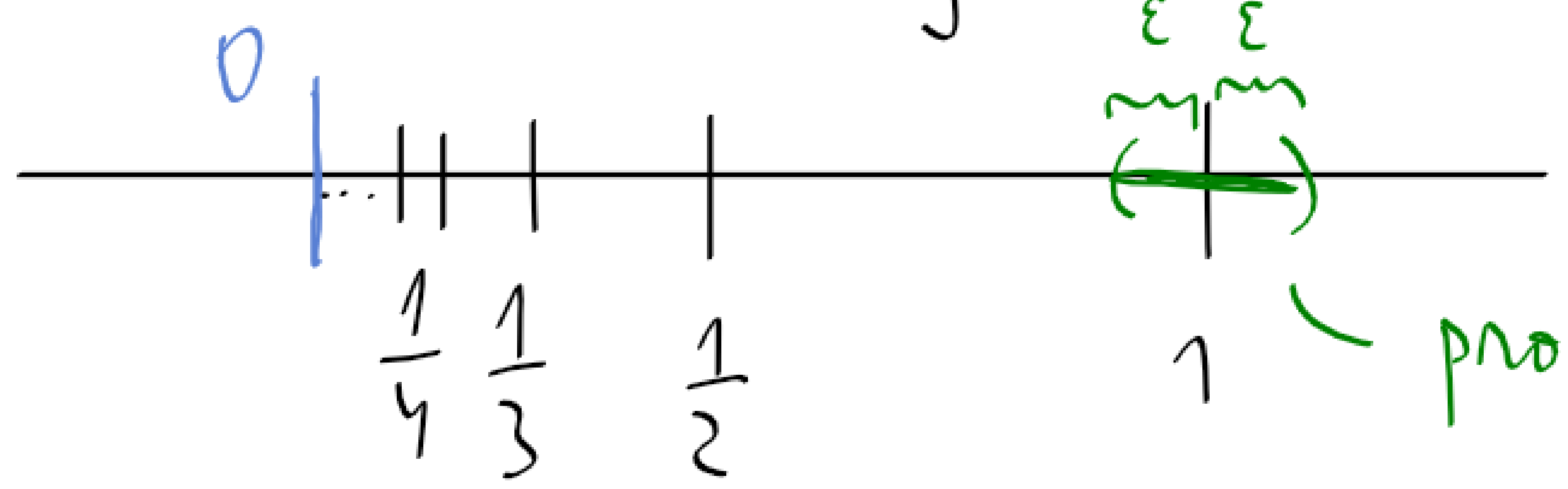
$$\{a\} = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\Big(\underbrace{(-\infty, a)}_{\text{ot.}} \cup \underbrace{(a, \infty)}_{\text{ot.}}\Big)}_{\text{ot.}}$$

$H(\{a\}) = \{a\}$ (2. důkaz uz.)



$B(a,\varepsilon)$ protíná jak $\{a\}$, tak i $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{a\}}$.

• $\underbrace{\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}}_{=:A}$ je otevřená? je uzavřená?



pro žádné ε není obsaženo v A

Tedy není <u>otevřená</u>, protože bod $1 \in A$ není vnitřní bod.

<u>Uzavřenost</u>: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$, ale $\lim \frac{1}{n} = 0 \notin A$. Tedy lze „vykonvergovat", a A není uz.

• $A \cup \{0\}$ je uzavřená?

<u>Dk:</u> $A \cup \{0\} = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\Big(\underbrace{(-\infty, 0)}_{\text{ot.}} \cup \underbrace{(1, \infty)}_{\text{ot.}} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{\left(\tfrac{1}{i+1}, \tfrac{1}{i}\right)}_{\text{ot.}} \Big)}_{\text{ot. (V38)}}$

<u>Tedy</u> $A \cup \{0\}$ je uzavřená.

1) <u>v $\mathbb{R}^2$</u>: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$

$= \mathbb{R}^2 \setminus \underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}}_{\text{Je to uzavřené?}}$

$B = B((0,0),1) \cup H(B((0,0),1))$

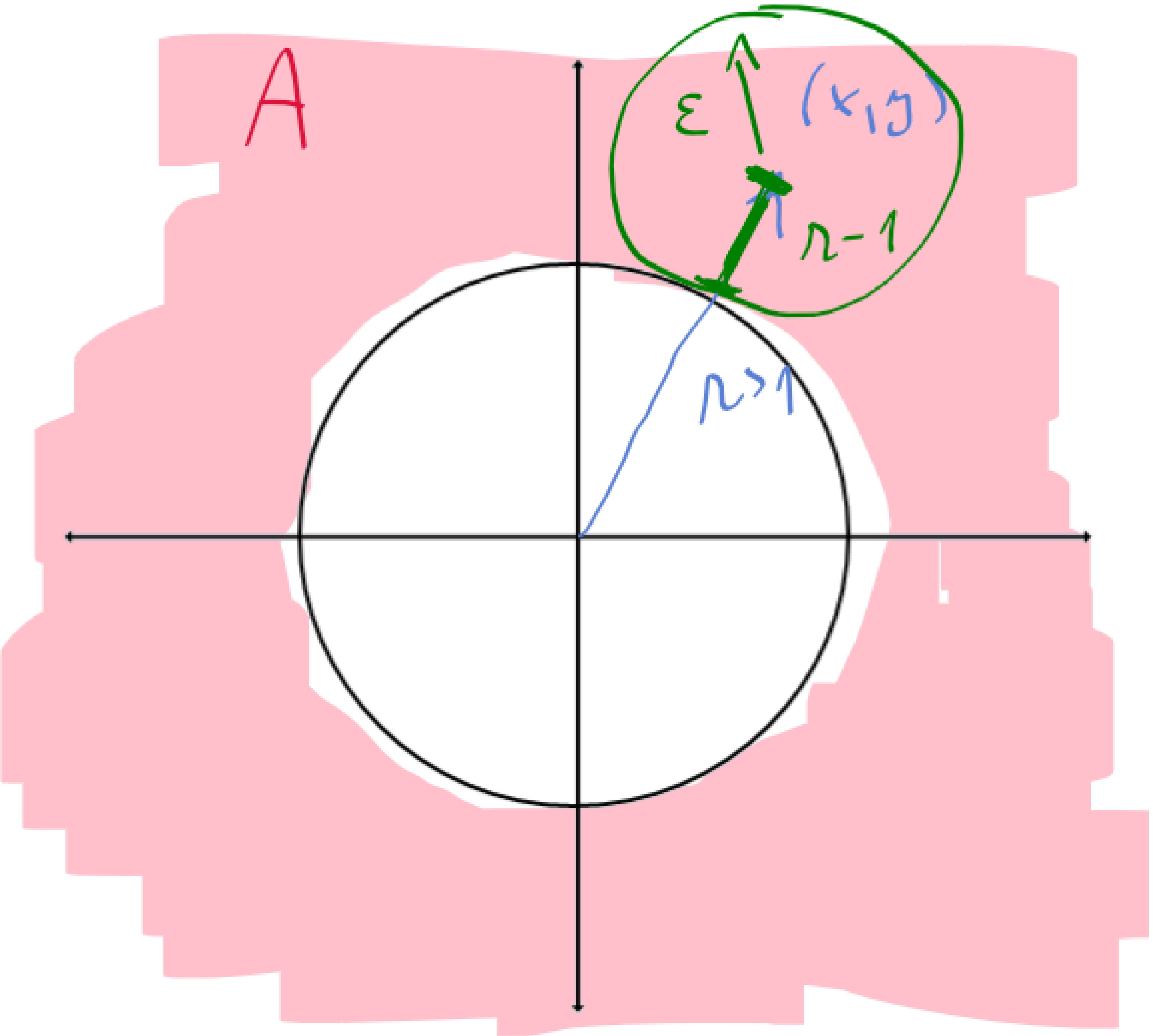
$B \overset{\text{def.}}{=} \overline{B((0,0),1)}$

Potřebujeme vědět 2 věci:

• $H(B((0,0),1)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

• uzávěr je vždy uzavřená množina.

<u>F:</u> Obojí platí



Jednodušší důkaz:

nechť $(x,y) \in A$, tj: $x^2 + y^2 > 1$.

$r = \sqrt{x^2 + y^2} > \sqrt{1} = 1$

$\varepsilon := r - 1 > 0$.

<u>Tvrdím:</u> $B((x,y), \varepsilon) \subseteq A$.

Podrobný Dk. pomocí Δ-ner. jako L37.

Fakt: Buď (M,ρ) MP, $f: M \to \mathbb{R}$ funkce. NVJE:

(i) f je spojitá na M

(ii) $\forall G \subseteq \mathbb{R}$ otevřenou: $f^{-1}(G)$ je ot. (v M).

(iii) $\forall F \subseteq \mathbb{R}$ uz.: $f^{-1}(F)$ je uz. (v M).

$$f^{-1}(G) = \{x \in M : f(x) \in G\}.$$

Funkce f je spoj. v bodě a $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in B(a,\delta): f(x) \in B(f(a),\varepsilon))$.

Zpět k množině $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}$.

Položme $f(x,y) = x^2+y^2$.

Tvrdím: $A = f^{-1}((1,\infty))$.

Ale • $(1,\infty)$ je otevřená v $\mathbb{R}$.

• f je spojitá na $\mathbb{R}^2$ (polynom).

$\overset{\text{Fakt}}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}((1,\infty))$ je otevřená.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) > 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \in (1,\infty)\} = f^{-1}((1,\infty))$$ je otevřená podle faktu.

Příklad: $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \dfrac{4-4x^2-y^2}{4y} \geq 0\right\} = A$

Špatně: $f(x,y) = \dfrac{4-4x^2-y^2}{4y}$ ... spojitá

$$A = \underbrace{f^{-1}(\underbrace{[0,\infty)}_{\text{uz.}})}_{\text{uz.}}\ \text{podle Fatchu}$$

$D_f \neq \mathbb{R}^2$!

Potřebujeme řikový přepis A.

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (4-4x^2-y^2 \geq 0 \wedge y>0)$$
$$\vee\ (4-4x^2-y^2 \leq 0 \wedge y<0)\}$$

$$= \{4-4x^2-y^2 \geq 0 \wedge y>0\} \cup$$
$$\cup\ \{4-4x^2-y^2 \leq 0 \wedge y<0\} =$$

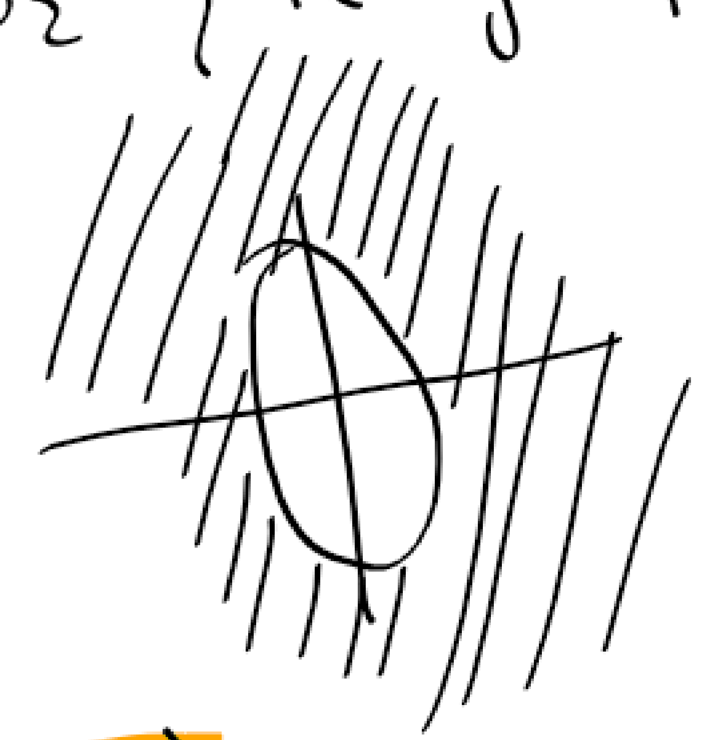
$$= \Big(\underbrace{\{4-4x^2-y^2 \geq 0\}}_{B_1} \cap \underbrace{\{y>0\}}_{\text{ot.}}\Big) \cup$$
$$\Big(\underbrace{\{4-4x^2-y^2 \leq 0\}}_{B_2} \cap \underbrace{\{y<0\}}_{\text{ot.}}\Big)$$

$f(x,y) = 4-4x^2-y^2$

$B_1 = f^{-1}([0,\infty))$ uz.

$B_2 = f^{-1}((-\infty,0])$ uz.

$B_2 = \{4x^2+y^2 \geq 4\}$



$$A = (\text{uz.} \cap \text{ot.}) \cup (\text{uz.} \cap \text{ot.})$$

nevíme nic!

$B_1 = \{4x^2+y^2 \leq 4\}$